

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

И.о. заведующего кафедрой  
математического анализа

Шабров С.А.



01.07.2021

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

### Б1. О.15 Об одномерных вариационных задачах

1. Код и наименование направления подготовки/специальности: 01.04.01  
Математика
2. Профиль подготовки: Математические модели гидродинамики
3. Квалификация выпускника: Магистр
4. Форма обучения: Очная
5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Кафедра математического анализа
6. Составители программы: Бахтина Жанна Игоревна, кандидат физико-математических наук, доцент
7. Рекомендована: Научно-методическим советом математического факультета протокол от 29.06.2021 № 0500-07
8. Учебный год: 2022/2023 Семестр(ы): 3

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

### Цели изучения дисциплины:

- освещение курса вариационного исчисления;
- получение знаний из теории функции Грина на отрезке и формирование основных навыков по вычислению функции Грина для различных задач;
- продолжение развития логического мышления;
- освещение методов получения дифференциальных уравнений, описывающих деформацию упругих континуумов, и различных условий сочленения упругих континуумов;
- сравнение понятий функции влияния и функции Грина.

### Задачи дисциплины:

- демонстрация способов выведения уравнений Эйлера и условий в особых точках для различных задач на деформацию упругих континуумов;
- овладение студентами способами исследования задач на невырожденность и получение функции Грина;
- выработка умений анализировать свойства функции Грина;
- формирование умений использовать математический аппарат для описания деформаций различных упругих систем.

## 10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Об одномерных вариационных задачах» относится к учебным дисциплинам базовой части блока Б1. В основной образовательной программы направления подготовки 01.04.01 Математика - Магистр.

## 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Компетенция		Планируемые результаты обучения
Код	Название	
ОПК-1.1	Обладает обширным диапазоном знаний, полученным в области математических и(или) естественных наук	Обладает знаниями из области математических и(или) естественных наук
ОПК-1.2	Умеет осуществлять первичный сбор и анализ материала, интерпретировать различные математические объекты	Умеет осуществлять первичный сбор и анализ материала, интерпретировать различные математические объекты
ОПК-1.3	Применяет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе имеющихся теоретических знаний и опыта решения математических задач	Умеет применять навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе имеющихся теоретических знаний и опыта решения математических задач

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах — 3/108.

Форма промежуточной аттестации зачет.

### 13. Виды учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)				
	Всего	По семестрам			
		1 сем.	2 сем.	3 сем.	4 сем.
Аудиторные занятия	36			36	
в том числе лекции	18			18	
практические	18			18	
лабораторные					
Самостоятельная работа	72			72	
Форма промежуточной аттестации (зачет – 0 час./экзамен – <u>36</u> час.)	0			0	
Итого:	108			108	

#### 13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
<b>Лекции</b>		
1	Модели математического происхождения.	«Тканая мембрана». Диаграмма бифуркаций. Математическая формализация: скалярный подход, векторный подход, синтетический подход, интегральный подход.
2	Упругие континуумы. Функционалы энергии соответствующих упругих континуумов.	Обоснование вида функционалов потенциальной энергии струны, стержня, систем упругих континуумов. Уравнение Эйлера.
3	Различные виды сочленения упругих континуумов.	Вывод условий сочленения упругих континуумов и упругих опор.
4	Невырожденность краевой задачи.	Исследование задач на невырожденность.
5	Функция Грина задачи на отрезке.	Различные подходы к пониманию функции Грина. Вычисление функции Грина.
6	Функция Грина как функция влияния	Подход к пониманию смысла функции Грина как к функции влияния.
7	Неосцилляция уравнений второго порядка.	Неосцилляция уравнений второго порядка. Критическая неосцилляция.
8	Осцилляционные свойства спектра.	Осцилляционные свойства спектра.

Практические занятия		
1	Модели математического происхождения.	«Тканая мембрана». Диаграмма бифуркаций. Математическая формализация: скалярный подход, векторный подход, синтетический подход, интегральный подход.
2	Упругие континуумы. Функционалы энергии соответствующих упругих континуумов.	Обоснование вида функционалов потенциальной энергии струны, стержня, систем упругих континуумов. Уравнение Эйлера.
3	Различные виды сочленения упругих континуумов.	Вывод условий сочленения упругих континуумов и упругих опор.
4	Невырожденность краевой задачи.	Исследование задач на невырожденность.
5	Функция Грина задачи на отрезке.	Различные подходы к пониманию функции Грина. Вычисление функции Грина.
6	Функция Грина как функция влияния	Подход к пониманию смысла функции Грина как к функции влияния.
7	Неосцилляция уравнений второго порядка.	Неосцилляция уравнений второго порядка. Критическая неосцилляция.
8	Осцилляционные свойства спектра.	Осцилляционные свойства спектра.

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Модели математического происхождения	2	2		10	14
2	Упругие континуумы. Функционалы энергии соответствующих упругих континуумов.	2	2		10	14
3	Различные виды сочленения упругих континуумов	2	2		10	14
4	Невырожденность краевой задачи.	2	2		10	14
5	Функция Грина задачи на отрезке	4	4		10	18
6	Функция Грина как функция влияния	2	2		5	9
7	Неосцилляция уравнений второго порядка	2	2		9	13
8	Осцилляционные свойства спектра	4	4		4	12

Итого	22	22	64	108
-------	----	----	----	-----

#### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся.

##### *Методические указания к лекционным занятиям*

В ходе лекционных занятий необходимо вести конспектирование учебного материала. Обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации. Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. Задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.

##### *Методические рекомендации студентам к практическим занятиям*

Важной составной частью учебного процесса в вузе являются практические занятия. Практические занятия требуют помимо знаний теоретического материала еще и навыков решения практических задач, и помогают студентам глубже усвоить учебный материал, приобрести практические навыки и навыки творческой работы над учебной и научной литературой.

В начале практического занятия происходит обсуждение задач, решенных студентами самостоятельно дома. Это возможность для студентов еще раз обратить внимание на не понятные до сих пор моменты и окончательно разобрать их. Преподаватель может (выборочно) проверить записи с самостоятельно решенными задачами.

Затем начинается опрос по теме, обозначенной для данного практического занятия. В процессе этого опроса студенты под руководством преподавателя более глубоко осмысливают теоретические положения по теме занятия.

На практическом занятии каждый его участник должен быть готовым к ответам на все теоретические вопросы, поставленные в плане, проявлять максимальную активность при их рассмотрении. Ответы должны строиться свободно, убедительно и аргументировано. Преподаватель следит, чтобы ответы были точными, логично построенными и не сводилось к чтению конспекта. Необходимо, чтобы выступающий проявлял глубокое понимание того, о чем он говорит, сопоставлял теоретические знания (определений, теорем, утверждений и т.д.) с их практическим применением для решения задач, был способен привести конкретные примеры тех математических объектов и положений, о которых рассуждает теоретически.

В ходе обсуждения теоретического материала могут разгореться споры, дискуссии, к участию в которых должен стремиться каждый. Преподавателю необходимо внимательно и критически слушать, подмечать особенности в суждениях студентов, улавливать недостатки и ошибки, корректировать их знания, и, если нужно, выступить в роли рефери. При этом обратить внимание на то, что еще не было сказано, или поддержать и развить интересную мысль, высказанную выступающим студентом.

В заключение опроса преподаватель, еще раз кратко резюмирует теоретический материал, необходимый для решения задач. Также преподаватель может (выборочно) проверить конспекты студентов и, если потребуется, внести в них исправления и дополнения,

Затем приступают к решению практических задач, используя изученные теоретические положения.

Планы практических занятий, их тематика, рекомендуемая литература, цель и задачи ее изучения сообщаются преподавателем на вводных занятиях или в методических указаниях по данной дисциплине.

#### *Методические рекомендации студентам к самостоятельной работе*

Среди основных видов самостоятельной работы студентов выделяют следующие: подготовка к лекциям, семинарским и практическим занятиям, зачетам и экзаменам, презентациям и докладам; написание рефератов, выполнение лабораторных и контрольных работ, участие в научной работе. Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности и уровня умений студентов.

Студентам необходимо обратить особое внимание на самостоятельное изучение рекомендованной учебно-методической (а также научной) литературы. Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной литературой, материалами периодических изданий и Интернета, статистическими данными является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у студентов свое отношение к конкретной проблеме.

Курс дисциплины построен таким образом, чтобы позволить студентам максимально проявить способность к самостоятельной работе. Для успешной самостоятельной работы предполагается тесный контакт с преподавателем.

Изучение дисциплины следует начинать с проработки настоящей рабочей программы, особое внимание, уделяя целям и задачам, структуре и содержанию курса.

### **15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины**

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1.	Найдюк, Филипп Олегович. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебное пособие / Ф.О. Найдюк ; Воронежский государственный университет .— Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2019 .— 62 с. — Библиогр.: с. 62.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
2.	Покорный Ю.В. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах / Ю.В. Покорный, Ж.И. Бахтина, М.Б. Зверева, С.А. Шабров . – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 192 с.
3.	Кулиев, В.Д. Сингулярные краевые задачи [Электронный ресурс] : монография — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2005. — 720 с. — Режим доступа: <a href="https://e.lanbook.com/book/2745">https://e.lanbook.com/book/2745</a> .
4.	Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В.Покорный и др. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 272 с.
5.	Вольперт А.И. Дифференциальные уравнения на графах / А.И.Вольперт. – Матем.сборник. – 1972. Т.88, № 4. – с. 578-588.
6.	Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. – М.: Наука, 1969. – 526 с.
7.	Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. – М: Наука, 1977. – 735 с.
8.	Кучер, Н.А. Нелинейные краевые задачи на плоскости [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Н.А. Кучер, О.В. Малышенко. — Электрон. дан. — Кемерово : КемГУ, 2012. — 116 с. — Режим доступа: <a href="https://e.lanbook.com/book/44355">https://e.lanbook.com/book/44355</a> .

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
9.	<a href="http://www.lib.vsu.ru">http://www.lib.vsu.ru</a> –официальный сайт библиотеки ВГУ
10.	<a href="http://www.math.vsu.ru">http://www.math.vsu.ru</a> – официальный сайт математического факультета ВГУ
11.	<a href="http://www.math.msu.ru">http://www.math.msu.ru</a> – официальный сайт мехмата МГУ

#### 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Крутиков, В. Н. Методы оптимизации : учебное пособие : [16+] / В. Н. Крутиков, В. В. Мешечкин ; Кемеровский государственный университет. – 2-е изд., исправ. и доп. – Кемерово : Кемеровский государственный университет, 2019. – 106 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: <a href="https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=600281">https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=600281</a>
2	Владимиров, В.С. Уравнения математической физики [Электронный ресурс] : учеб. / В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2000. — 400 с. — Режим доступа: <a href="https://e.lanbook.com/book/2363">https://e.lanbook.com/book/2363</a> .
3	Бибиков, Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2011. — 304 с. — Режим доступа: <a href="https://e.lanbook.com/book/1542">https://e.lanbook.com/book/1542</a> .
4	Математика. Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы : учебно-методическое пособие / Д.В. Гоцев [и др.] ; Воен. учеб.-науч. центр воен.-воздуш.сил "Воен.-воздуш. акад. им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина" (г. Воронеж) .— Воронеж : ВУНЦ ВВС "ВВА", 2016 .— 94 с.
5	Положение об организации самостоятельной работы обучающихся в Воронежском государственном университете

#### 17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (<https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11030>).

Перечень необходимого программного обеспечения: Microsoft Windows 7 Enterprise, Microsoft Windows Server 2008, Microsoft Windows 10 Enterprise, LibreOffice 5 (*Writer* (текстовый процессор), *Calc* (электронные таблицы), AnyLogic PLE, Maxima, Total Commander, WinDjView, Foxit Reader, 7-Zip, Mozilla Firefox

#### 18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Специализированная мебель.

Для самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой, оснащенный необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть.

При реализации дисциплины с использованием дистанционного образования возможны дополнения материально-технического обеспечения дисциплины

## 19. Фонд оценочных средств:

### 19.1. Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения

Код и содержание компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции посредством формирования знаний, умений, навыков)	Этапы формирования компетенции (разделы (темы) дисциплины или модуля и их наименование)	ФОС* (средства оценивания)
ОПК-1.1 Обладает обширным диапазоном знаний, полученным в области математических и(или) естественных наук	Обладает обширным диапазоном знаний, полученным в области математических и(или) естественных наук	1-8	Контрольная работа
ОПК-1.2 Умеет осуществлять первичный сбор и анализ материала, интерпретировать различные математические объекты	Умеет осуществлять первичный сбор и анализ материала, интерпретировать различные математические объекты	1-8	
ОПК-1.3 Применяет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе имеющихся теоретических знаний и опыта решения математических задач	Применяет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе имеющихся теоретических знаний и опыта решения математических задач	1-8	
Промежуточная аттестация			Вопросы к зачету

## 19.2 Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Невладение теоретическим материалом, неумение применять теоретический материал для решения практических задач.	-	<b>Не зачтено</b>
Владение теоретическим материалом. Умение применять теоретический материал для решения практических задач.	Достаточный	<b>Зачтено</b>

## 19.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

### 19.3.1 Перечень вопросов к зачету

1. «Тканая мембрана».
2. Диаграмма бифуркаций.
3. Математическая формализация: скалярный подход, векторный подход, синтетический подход, интегральный подход.
4. Лемма Лагранжа.
5. Лемма Дюбуа-Реймона.
6. Обоснование вида функционалов потенциальной энергии струны.
7. Обоснование вида функционалов потенциальной энергии стержня.
8. Обоснование вида функционалов потенциальной энергии систем упругих континуумов.
9. Уравнение Эйлера. Вывод для простейшей системы.
10. Вывод условий сочленения упругих континуумов и упругих опор.
11. Математическая модель системы, состоящей из двух шарнирно-сочлененных в точке  $\xi \in (0,1)$  стержней. Концы конструкции предполагаются жестко зажатými (в точках  $x=0$  и  $x=1$ ).
12. Исследование задач на невырожденность.
13. Различные подходы к пониманию функции Грина.
14. Вычисление функции Грина.
15. Подход к пониманию смысла функции Грина как к функции влияния.
16. Неосцилляция уравнений второго порядка.
17. Критическая неосцилляция.
18. Осцилляционные свойства спектра.

### 19.3.2 Перечень практических заданий

1. Найдите допустимые экстремали (т.е. решения уравнения Эйлера, удовлетворяющие указанным условиям) для заданных функционалов:

$$J(u) = \int_{-1}^0 u(x) dx \quad u(-1)=1 \quad u(0)=0$$

$$\int_a^b (u')^2 - 2\lambda u \, dx \quad u(a)=A \quad u(b)=B$$

$$\int_0^1 (x u')^2 \, dx \quad u(0)=0 \quad u(1)=1$$

2. Опишите условия для струны, упруго закрепленной на обоих концах.

3. Выведите дифференциальное уравнение, моделирующее деформации струны, помещенной в упругую среду.

4. Опишите математическую модель струны, жестко закрепленной в точках  $x=0$  и  $x=1$  и подпертой пружиной жесткости  $k$  во внутренней точке  $\xi \in (0,1)$ .

5. Опишите математическую модель упруго-сочлененной в точке  $x=\xi \in (0,1)$  (с помощью пружины жесткости  $k$ ) цепочки из двух струн.

А) Концы цепочки предполагаются жестко закрепленными (в точках  $x=0$  и  $x=1$ ).

Б) Левый конец цепочки (в точке  $x=0$ ) упруго закреплен с помощью пружины жесткости  $k_1$ , а правый (в точке  $x=1$ ) свободен.

В) Опишите случай А), если к концам  $x \in (0, \xi)$  и  $x \in (\xi, 1)$  струн дополнительно прикреплены пружины жесткости  $k_1$  и  $k_2$  соответственно.

Указание. Заметьте, что в данной ситуации функция  $u(x)$  терпит разрыв в точке  $x=\xi$ .

Наличие скрепляющей цепочки в точке  $\xi$  пружины ведет к появлению в функционале (5.2)

слагаемого  $\frac{k(u(\xi^-) - u(\xi^+))^2}{2}$ . Следует разбить интеграл на два – левее и правее

точки  $\xi$ .

6. Найдите допустимые экстремали (т.е. решения уравнения Эйлера – Пуассона, удовлетворяющие указанным условиям) для заданных функционалов:

$$\int_0^1 (u')^2 \, dx \quad u(0)=0, u(1)=1 \quad u(1)=0, u'(1)=1$$

$$\int_0^3 (3x u')^2 \, dx \quad u(0)=0, u'(0)=1, u(3)=0, u'(3)=25$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x^2 - 5x' + u')^2 \, dx \quad u(0)=3, u'(0)=4, u(\frac{\pi}{2})=1, u'(\frac{\pi}{2})=-1.$$

### 19.3.3 Перечень заданий для контрольных работ

1. Опишите математическую модель стержня, жестко защемленного на левом конце (в точке  $x=0$ ) и имеющего упругую опору (пружину жесткости  $\gamma$ ) на правом конце (в точке  $x=1$ ).
2. Опишите математическую модель стержня со свободным правым концом (в точке  $x=1$ ), жестко защемленного на левом конце (в точке  $x=0$ ).

3. Опишите математическую модель стержня, имеющего упругие опоры на обоих концах.
4. Опишите математическую модель системы, состоящей из двух шарнирно-сочлененных в точке  $\xi \in (0,1)$  стержней при наличии в точке  $\xi$  упругой опоры. Концы конструкции предполагаются шарнирно закрепленными (в точках  $x=0$  и  $x=1$ ). Указание. В функционале энергии (8.2) появится дополнительное слагаемое  $\frac{\gamma^2(\xi)}{2}$ , где  $\gamma$  – коэффициент упругости опоры.

### КИМ (билет к зачету)

#### Вариант 1

##### Теория:

1. Обоснование вида функционалов потенциальной энергии струны.
2. Критическая неосцилляция.

##### Практика:

Найдите допустимые экстремали (т.е. решения уравнения Эйлера, удовлетворяющие указанным условиям) для заданных функционалов:

$$1. \int_{-1}^0 (u' - 2u)^2 dx \quad u(-1)=1 \quad u(0)=0$$

$$2. \int_a^b (u' - 2u)^2 dx \quad u(a)=A \quad u(b)=B$$

19.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

**Промежуточная аттестация** предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины. Промежуточная аттестация по дисциплине «Об одномерных вариационных задачах» проводится в форме зачета.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра.